

فرمهای مدولار

مقطع درس: تحصیلات تکمیلی (اختیاری) تعداد واحد: ۴ واحد بدون پیش نیاز

اهداف درس:

این درس معرفی رده مهمی از توابع (فرمهای مدولار) روی دیسک پوانکاره است که تحت عمل زیرگروههای گسسته تقریباً پایا هستند. این توابع کاربردهای مهم و وسیعی در نظریه اعداد، نظریه فرمهای مربعی و شبکه ها، نمایش گروهها، هندسه جبری و فیزیک دارند.

سرفصل:

- تعریف نیم صفحه بالایی، عمل گروه خطی $GL_2(\mathbb{R})$ و تبدیل موبیوس روی آن، معرفی متر هذلولوی، معرفی گروه گسسته $SL_2(\mathbb{Z})$ ، زیرگروههای همبستگی $\Gamma(n)$ و $\Gamma_0(n)$ ، تعریف نقاط کاسپ، تعریف دامنه بنیادی، محاسبه مساحت دامنه بنیادی.
- تعریف فرمهای مدولار تحلیلی نسبت به گروه $SL_2(\mathbb{Z})$ ، معرفی بسط فوریه فرمهای مدولار حول کاسپ، فرمول جمع پواسون برای محاسبه بسط فوریه، معرفی سریهای آیزنشتاین و محاسبه بسط فوریه آنها، اثبات متناهی بُعد بودن فرمهای مدولار، فرمول بُعد و نشان دادن یک پایه بر حسب سریهای آیزنشتاین، ارائه نتایجی از جمله نشان دادن اتحادهای بین سریهای آیزنشتاین، معرفی فرمهای کاسپ و ضرب داخلی پترسون، معرفی تابع دلتا و جی، بیان حدسهای رامنوجان درباره دلتا، ارائه تخمینی برای ضرایب بسط فوریه فرمهای مدولار.
- مشتق فرمهای مدولار و تعریف فرمهای شبه مدولار، تعریف مشتق سر، معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی برای فرمهای مدولار، معادلات دیفرانسیل رامنوجان، براکت رنکین-کوهن.
- تئوری هکه، معرفی عملگر هکه، فرمهای هکه، و تعریف L -سری وابسته به فرمهای هکه، ضرب اوپلری سری، نشان دادن معادله تابعی و گسترش تحلیلی آن، اثبات دو حدس اول رامنوجان درباره تابع دلتا.
- توابع مدولار روی زیرگروههای همبستگی $\Gamma_0(n)$ ، خمهای مدولار، فرمهای تازه و قدیمی، نظریه اتکین-لنر، اشاره به تناظر ایشلر-شیمورا.
- معرفی توابع تتا و معادلات تابعی آنها، اتحادهای تابعی بین توابع تتا و آیزنشتاین، بیان چند کاربرد توابع تتا از جمله قضیه دومربع و چهارمربع، و همچنین معادله تابعی تابع زتای ریمان.
- مباحث اختیاری: فرمهای مدولار غیر تحلیلی، روش رنکین-سلبرگ، اشاره به چند کاربرد آن از جمله قضیه اعداد اول، فرمول اثر ایشلر، سریهای پوانکاره، قضیه تصویر تحلیلی.

منابع پیشنهادی:

- [1] S. Lang, *Introduction to modular forms*, Springer, (1976).
- [2] D. Zagier, *From number theory to physics*, chapter 4, edited by M. Waldschmit, P. Moussa, J. Luck, C. Itzykson, Springer, (1992).
- [3] F. Diamond, J. Shurman, *A first course in modular forms*, GTM 228, Springer, (2005).
- [4] W. Stein, *Modular Forms, a Computational Approach*, AMS, Providence, (2006).